

Penerapan Metode *Singular Value Decomposition* (SVD) dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear

Asmaun¹

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Makassar¹

asmaun@unm.ac.id¹

Corresponding Author: Asmaun, E-mail: asmaun@unm.ac.id

ABSTRACT

Eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss-Jordan merupakan metode yang sangat lazim dan banyak digunakan untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linear $Ax = b$. Namun demikian metode ini hanya dapat digunakan untuk sistem persamaan linear yang konsisten. Sehingga diperlukan suatu metode yang tidak hanya dapat digunakan untuk menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linear konsisten tapi juga dapat memberikan solusi untuk sistem persamaan linear yang tidak konsisten. Solusi aproksimasi untuk sistem persamaan linear yang tidak konsisten dapat ditentukan dengan menggunakan metode *Singular Value Decomposition* (SVD). Metode SVD ini adalah metode faktorisasi matriks yang berkaitan erat dengan nilai singular matriks. Analisis SVD dapat digunakan untuk menentukan suatu solusi pendekatan dengan memanfaatkan basis ortonormal untuk empat subruang fundamental yang terkait dengan matriks A yaitu $R(A)$, $R(A^H)$, $N(A)$ dan $N(A^H)$. Basis-basis tersebut dapat digunakan untuk menghitung solusi sistem persamaan linear yang konsisten dan tidak konsisten.

KEYWORDS

Singular Value Decomposition (SVD), Basis Ortonormal, Nilai Singular, Sistem Persamaan Linear (SPL)

ARTICLE DOI:

<https://doi.org/10.53696/venn.v5i1.445>

A. Pendahuluan

Sebagian besar dari sejarah ilmu pengetahuan alam adalah catatan dari usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep yang dapat menguraikan permasalahan dalam dunia nyata ke dalam istilah-istilah matematika. Menyelesaikan sistem persamaan linier merupakan salah satu permasalahan yang cukup penting dalam matematika, karena lebih dari 75 persen dari semua masalah matematika yang dijumpai dalam aplikasi ilmiah maupun industri melibatkan penyelesaian sistem linier hingga tahap tertentu ([Haidir Ahmad & Ratnasari, 2010](#)). Dengan menggunakan metode-metode matematika modern, sering kali suatu masalah yang rumit dapat direduksi menjadi suatu sistem persamaan linier. Dalam dunia nyata, sistem linier dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada beberapa bidang, di antaranya pada bidang perdagangan, ekonomi, elektronika, fisika, kimia dan lain sebagainya.

Bentuk umum dari Sistem Persamaan Linier (SPL) adalah :

$$Ax = b$$

suatu persamaan semacam ini dinamakan persamaan linier dalam variabel (peubah) x di mana A adalah koefisien persamaan dan b adalah konstanta persamaan ([Anton & Rorres, 2013](#); [Larson et al., 2013](#)). Sistem persamaan linear mempunyai beberapa bentuk pemecahan atau solusi, yaitu solusi tunggal, banyak solusi dan tidak ada solusi (tidak konsisten). Metode yang sangat klasik untuk menyelesaikan SPL adalah dengan Eliminasi-substitusi, tetapi metode ini menjadi tidak efektif bila jumlah variabel dan jumlah persamaan dari SPL tersebut tidak sedikit ([Aryani & Yulianti, 2014](#)).

Untuk memudahkannya, maka SPL tersebut dinyatakan dalam bentuk matriks, di mana A merupakan matriks koefisien dan b merupakan matriks konstanta persamaan. Untuk menyelesaikan SPL tersebut, sehingga didapatkan solusi yang memenuhi persamaannya, banyak metode yang dapat digunakan. Metode yang biasa digunakan adalah Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, aturan Cramer, atau menggunakan invers matriks koefisien, di mana solusinya diberikan oleh:

$$x = A^{-1}b$$

Namun bila matriks yang terbentuk bukanlah matriks persegi, maka aturan Cramer dan metode invers matriks koefisien tidak dapat digunakan (Wibowo et al., 2017). Hal ini di karenakan determinan dari matriks koefisien tidak dapat dicari, sehingga inversnya-pun tidak dapat ditentukan. Selain itu, tidak semua matriks persegi mempunyai invers. Kelemahan lain dari keempat metode di atas adalah apabila SPL tersebut tidak mempunyai pemecahan (tidak konsisten), maka solusi dari SPL tersebut tidak dapat ditentukan.

Untuk mengatasi kekurangan dari metode-metode di atas, ada suatu metode yang juga dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL. Metode tersebut adalah dengan analisis Dekomposisi Nilai Singular atau *Singular Value Decomposition* (SVD) (Akritas et al., 2006; Bentbib & Kanber, 2015; Haidir Ahmad & Ratnasari, 2010). Dengan menggunakan analisis SVD, solusi dari persamaan selalu dapat dicari meskipun matriks koefisien yang terbentuk bukanlah matriks persegi maupun matriks yang tidak mempunyai invers (Marzuki et al., 2018; Meng & Li, 2026; Zhu et al., 2026). Kelebihan lain dari metode ini adalah solusi dari SPL tetap dapat dicari meskipun SPL tersebut tidak mempunyai pemecahan, dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik (Dembélé, 2026). Setiap guru aljabar linear harus familiar dengan dekomposisi nilai singular matriks. Ini memiliki sifat-sifat aljabar yang menarik dan atraktif, dan menyampaikan wawasan geometri dan teoritis yang penting tentang transformasi linear (Kalman, 1996).

B. Metode

1. Sistem Persamaan Linear

Sebuah garis dalam bidang xy secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan yang berbentuk

$$a_1x + a_2y = b$$

Persamaan semacam ini kita namakan persamaan linier dalam peubah (variable) x dan peubah y . Secara lebih umum, kita mendefinisikan *persamaan linier* dalam n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari m persamaan $L_1, L_2, \dots, L_m$, dengan n variable $x_1, x_2, \dots, x_n$, yang dapat disusun dalam bentuk standar

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

yang mana a_{ij} dan b_i adalah konstanta. Dimana a_{ij} adalah koefisien dari variable x_j pada persamaan L_t , dan bilangan b_t adalah konstanta dari persamaan L_t .

Sistem persamaan linier pada persamaan diatas yang terdiri dari m persamaan linier dengan n variable ekuivalen dengan persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau $AX = B$, yang mana $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_j]$ adalah vector kolom dari variable-variabel, dan $B = [b_i]$ adalah vector kolom dari konstanta (Anton & Rorres, 2013).

Untuk menyelesaikan SPL tersebut, sehingga didapatkan solusi yang memenuhi persamaannya, banyak metode yang dapat digunakan. Metode yang biasa digunakan adalah Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, aturan Cramer atau menggunakan invers matriks koefisien ([Andrilli & Hecker, 2022](#)).

a. Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss adalah suatu cara mengoperasikan nilai-nilai di dalam matriks dimana mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang lebih sederhana. Caranya dengan mengubah system persamaan linier tersebut kedalam matriks teraugmentasi dan mengoperasikannya. Setelah menjadi matriks Eselon-baris, lakukan substitusi balik untuk mendapatkan nilai dari variable-variabel tersebut.

b. Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan adalah pengembangan dari eliminasi Gauss yang hasilnya lebih sederhana lagi. Caranya adalah dengan meneruskan operasi baris dari eliminasi Gauss sehingga menghasilkan matriks yang Eselon-baris tereduksi. Ini juga dapat digunakan sebagai salah satu metode penyelesaian persamaan linear dengan menggunakan matriks.

c. Aturan Cramer

Metode Cramer didasarkan atas perhitungan determinan matriks. Suatu SPL yang berbentuk $Ax = b$ dengan A adalah matriks bujur sangkar dapat dikerjakan dengan metode Cramer jika hasil perhitungan menunjukkan bahwa $\det(A) \neq 0$, maka system tersebut mempunyai pemecahan yang unik. Pemecahan ini adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dimana A_j adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke j dari A dengan entri-entri dalam matriks

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

d. Invers matriks koefisien

Jika suatu SPL berbentuk $Ax = b$ dan A matriks bujur sangkar yang dapat dibalik atau $\det(A) \neq 0$, dengan menggunakan invers matriks maka system tersebut mempunyai persis satu pemecahan, yakni $x = A^{-1}b$ dimana A^{-1} adalah invers matriks.

Beberapa bentuk pemecahan atau solusi dari sistem persamaan linear adalah sebagai berikut:

- ✓ **Solusi tunggal.** Dikatakan memiliki solusi tunggal apabila terdapat satu titik potong dari sistem persamaan linear.
- ✓ **Banyak Solusi.** Dikatakan memiliki banyak solusi apabila terdapat banyak titik potong dari sistem persamaan linear atau berupa garis-garis lurus yang saling berhimpit.
- ✓ **Tidak ada solusi (tidak konsisten).** Dikatakan tidak ada solusi apabila tidak ada titik potong dari sistem persamaan linear. Koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan riil dan ada yang berbentuk bilangan kompleks. Sistem persamaan linear kompleks

merupakan sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan kompleks ([Aryani & Yulianti, 2014](#)). Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari bilangan riil dan bilangan imajiner. Sistem persamaan linear kompleks dapat juga diselesaikan dengan menggunakan Operasi Baris Elementer ([Nicholson, 2001](#)).

2. Metode Singular Value Decomposition (SVD)

Singular Value Decomposition atau Dekomposisi Nilai Singular yang selanjutnya ditulis dengan SVD adalah suatu teknik yang digunakan secara luas untuk mendekomposisikan suatu matriks kedalam beberapa komponen matriks yang berkaitan erat dengan nilai singular dari matriksnya. Proses dekomposisi ini sering juga disebut dengan *Faktorisasi*.

Dalam SVD, suatu matriks difaktorkan menjadi tiga buah matriks, dimana salah satu dari matriks tersebut entrinya merupakan nilai singular dari matriksnya. Berikut ini akan diberikan definisi dari nilai singular.

Definisi 3.1 ([Haidir Ahmad & Ratnasari, 2010](#)). Diberikan matriks dengan elemen-elemennya anggota himpunan kompleks $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ dengan $\text{rank}(A) = r$, dimana $r \leq \min(m, n)$, nilai eigen dari matriks $A^H A$ adalah $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ akar nilai eigen positif dari $A^H A$ disebut dengan nilai singular (σ) dari matriks A dan dinyatakan dengan

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n$$

Untuk matriks A dengan elemen-elemennya anggota himpunan bilangan riil $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ maka nilai eigen yang digunakan berasal dari matriks $A^T A$, tetapi pada pembahasan selanjutnya akan digunakan matriks dengan anggota-anggota kompleks mengingat himpunan bilangan riil adalah elemen dari himpunan bilangan kompleks $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$.

Definisi 3.2 ([Anton & Rorres, 2013](#); [Aryani & Yulianti, 2014](#)). Jika A adalah suatu matriks dengan anggota-anggota kompleks, maka transpose konjugat dari A , yang dinyatakan dengan A^H , didefinisikan oleh

$$A^H = \bar{A}^T$$

Dimana $\bar{A}$ adalah matriks yang anggota-anggotanya adalah konjugat kompleks dari anggota-anggota yang berpadanan pada A dan $\bar{A}^T$ adalah transpose dari $\bar{A}$.

Suatu matriks A yang berukuran $m \times n$ dan $m \geq n$ (asumsi ini hanya dibuat untuk memudahkan, semua hasil juga akan berlaku jika $m < n$) dengan $\text{rank}(A) = r$ dan $r \leq \min(m, n)$, dapat difaktorkan kedalam bentuk :

$$A = USV^H$$

yang disebut dengan SVD dari matriks A , dimana:

$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$ adalah matriks uniter berukuran $m \times m$

$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ adalah matriks uniter berukuran $n \times n$

$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berukuran $m \times n$, dimana Σ adalah matriks diagonal yang berukuran $r \times r$

Definisi 3.3 (Ayres, 1982). Matriks bujur sangkar disebut uniter jika $A^H A = A A^H = I$, yaitu jika $A^H = A^{-1}$.

Teorema 3.4 (Nicholson, 2001). Diberikan matriks A berukuran $m \times n$ yang mempunyai rank r dan nilai singularnya adalah $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$. Jika terdapat matriks U , S , dan V maka matriks A dapat difaktorkan kedalam bentuk :

$$A = USV^H$$

Dimana U dan V adalah matriks uniter, $S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan Σ adalah matriks diagonal yang entrinya adalah nilai singular dari matriks A .

Berikut ini akan diberikan penjelasan tentang matriks U , S , dan V .

1. Matriks S

Matriks S disebut matriks nilai singular dari A karena entri diagonal dari matriks S diisi dengan nilai singular dari A sedangkan entri selain diagonalnya adalah nol. Matriks S berukuran $m \times n$ dan mempunyai bentuk :

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$$

2. Matriks V

Misalkan $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r \ v_{r+1} \ \dots \ v_n]$. V adalah matriks uniter berukuran $n \times n$. Karena V adalah matriks uniter, maka vektor-vektor kolom dari V membentuk himpunan ortonormal. Vektor-vektor kolom dari matriks V adalah vektor-vektor eigen dari matriks $A^H A$. Agar vektor-vektor kolom matriks V membentuk himpunan ortonormal, maka vektor-vektor eigen dari $A^H A$ tersebut dinormalisasikan, yaitu:

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

x_i adalah vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i . Untuk setiap $r + 1 \leq i \leq n$, v_i akan membentuk basis ortonormal untuk $N(A)$. Sedangkan untuk setiap $1 \leq i \leq r$, v_i akan membentuk basis ortonormal untuk $R(A^H)$ dan himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ membentuk basis ortonormal untuk C^n .

Definisi 3.5 (Sutojo et al., 2010). Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu: $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Defenisi 3.6 Ortogonal dan Ortonormal

Misalkan V adalah sebuah RHKD (Ruang Hasil Kali Dalam). Himpunan vektor S dikatakan himpunan ortogonal apabila **setiap sepasang vektor berbeda di S saling ortogonal**, yaitu

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \text{ dengan } \vec{u} \neq \vec{v}$$

Selanjutnya himpunan ortogonal S juga dikatakan sebagai himpunan ortonormal apabila **setiap vektor di S memiliki norm 1**, yaitu

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \text{ dengan } \vec{u} \neq \vec{v} \text{ dan}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = 1, \forall \vec{u} \in S$$

3. Matriks U

Misalkan $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r \ u_{r+1} \ \dots \ u_m]$. U adalah matriks uniter berukuran $m \times m$. Basis ortonormal dari $R(A)$ didefinisikan oleh

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

untuk setiap u_i dengan $1 \leq i \leq r$, akan berada di dalam ruang kolom dari $R(A)$. Sedangkan untuk setiap u_i dengan $r + 1 \leq i \leq m$ akan membentuk basis ortonormal untuk $N(A^H)$ dan himpunan $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ membentuk basis ortonormal untuk C^m .

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $A = USV^H$,

$$AV = A(v_1 \ \dots \ v_r \ v_{r+1} \ \dots \ v_n)$$

$$U^H AV = U^H A(v_1 \ \dots \ v_r \ v_{r+1} \ \dots \ v_n)$$

$$= U^H (Av_1 \ \dots \ Av_r \ Av_{r+1} \ \dots \ Av_n)$$

$$= U^H (\sigma_1 u_1 \ \dots \ \sigma_r u_r \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$= (\sigma_1 U^H u_1 \ \dots \ \sigma_r U^H u_r \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$= (\sigma_1 e_1 \ \dots \ \sigma_r e_r \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$U^H AV = S$$

$$AV = US$$

atau dengan kata lain $A = USV^H$

Contoh 1

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, akan dicari SVD dari matriks A .

Penyelesaian:

$$A^H = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A berukuran 3×2 , nilai eigen dari matriks $A^H A$ adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$, vector-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut adalah $x_1 = [1 \ 1]^T$ dan $x_2 = [-1 \ 1]^T$.

a. Menyusun matriks S

Nilai singular dari matriks A adalah

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$$

Matriks Σ yang terbentuk adalah $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka $S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. Menyusun matriks V

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

$$\text{Maka } v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Sehingga } V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c. Menyusun matriks U

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

$$\text{Maka } u_1 = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \text{ dan } u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{Sehingga } U = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

matriks tersebut mempunyai ukuran 3x2, padahal seharusnya berukuran 3x3. Agar berukuran 3x3, maka matriks U harus ditambahkan satu kolom lagi, di mana kolom tersebut saling ortonormal dengan vector kolom lainnya. Misalnya diambil

$$u_3 = \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ sehingga } U = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Akhirnya didapatkan SVD dari matriks A , yaitu :

$$A = USV^H$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C. Hasil dan Pembahasan

1. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan Metode Singular Value Decomposition (SVD)

Pada bagian ini, akan dijelaskan bagaimana analisis SVD dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu SPL. Seperti yang telah diketahui, suatu SPL mempunyai bentuk umum

$$Ax = b \quad (1)$$

Dimana A merupakan matriks koefisien yang akan dicari bentuk SVD-nya. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan SPL menggunakan analisis SVD.

Defenisi 4.1 (Akritas et al., 2006; Haidir Ahmad & Ratnasari, 2010). *Jika A adalah sebuah matriks $m \times n$, maka subruang R^n yang direntang oleh vektor baris A disebut ruang baris A atau $R(A^H)$, dan subruang R^m yang direntang oleh vektor kolom A disebut ruang kolom A atau $R(A)$. Ruang solusi dari sistem persamaan linear homogen $Ax=0$ yang merupakan subruang R^n , disebut ruang nol A atau $N(A)$ dan untuk persamaan linear homogen $A^T x=0$ disebut ruang nol A^H atau $N(A^H)$.*

Setelah diberikan defenisi basis ortonormal dari empat subruang pokok dari matriks A yaitu basis $R(A)$, $R(A^H)$, $N(A)$, dan $N(A^H)$, maka berikut ini Langkah-langkah untuk menyelesaikan SPL:

✓ Langkah 1

Dengan menggunakan analisis SVD dari matriks $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, akan didapatkan vector $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ dan vector $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ yang masing-masing merupakan basis ortonormal dari $R(A^H)$ dan $N(A)$, serta vector $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ dan vector $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m\}$ yang masing-masing merupakan basis ortonormal dari $R(A)$ dan $N(A^H)$.

✓ Langkah 2

Suatu SPL akan konsisten jika dan hanya jika b berada dalam $R(A)$. Untuk mengetahui bahwa b berada dalam $R(A)$, maka akan diuji apakah b sama dengan proyeksi b pada $R(A)$, dimana $R(A)$ direntang oleh vector $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$. Proyeksi b pada $R(A)$ diberikan oleh persamaan di bawah ini :

$$proy_{R(A)} b = \sum_{k=1}^r \langle b, u_k \rangle u_k \quad (2)$$

Berdasarkan pengujian di atas akan diperoleh dua kasus, yaitu :

1. Mempunyai Paling Sedikit Satu Solusi

Untuk $b \in R(A)$. Pada kasus ini, system mempunyai paling sedikit satu solusi. Karena $b \in R(A)$, maka $b = proy_{R(A)} b$ sehingga menurut persamaan (2) diperoleh persamaan :

$$b = \sum_{k=1}^r \langle b, u_k \rangle u_k$$

Karena $u_k = \frac{1}{\sigma_k} A v_k$, maka

$$b = \sum_{k=1}^r \langle b, u_k \rangle \frac{A v_k}{\sigma_k}$$

operasi matriks bersifat linier, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$b = A \sum_{k=1}^r \langle b, u_k \rangle \frac{v_k}{\sigma_k} \quad (3)$$

Dengan membandingkan persamaan (2) dengan persamaan (3), didapatkan

$$x = \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \quad (4)$$

yang merupakan solusi dari SPL pada persamaan (1). Tetapi, nilai solusi dari sistem linier bergantung pada ruang nol dari matriks A yaitu $N(A)$. Sehingga ada dua subkasus, yaitu :

a. Jika $N(A) = \{0\}$

Maka sistem linier mempunyai satu solusi (solusi tunggal) di mana solusinya diberikan oleh persamaan (4). Untuk membuktikan ketunggalan dari solusinya, akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi.

Misalkan terdapat solusi lain dari persamaan (1) yaitu x^* , maka $Ax = b$ dan $Ax^* = b$ kedua-duanya bernilai benar. Dengan mengurangkan keduanya, akan didapatkan $A(x - x^*) = Ax - Ax^* = b - b = 0$. Karena $N(A) = \{0\}$, maka berlaku $A0 = 0$. Hal ini berarti $x - x^* = 0$ atau $x = x^*$, dengan kata lain solusinya adalah tunggal.

b. Jika $N(A) \neq \{0\}$

Jika $N(A) \neq \{0\}$, maka sistem linier mempunyai tak terhingga banyaknya solusi dan solusinya diberikan oleh :

$$x_{inf} = \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k + \sum_{k=1}^r \mu_k v_k \quad (5)$$

yang diperoleh dari :

Setiap solusi umum dari SPL dapat dinyatakan dengan $X = x + x_N$, dimana $x_N \in N(A)$. Pada subkasus 1), $N(A) = \{0\}$ sehingga $X = x$. Namun karena pada kasus ini $N(A) \neq \{0\}$, maka terdapat titik $x_N \in N(A)$ sedemikian sehingga $Ax_N = 0$. Jadi, solusi umum untuk kasus ini adalah $X = x + x_N$, atau disini dinotasikan dengan

$$x_{inf} = x + x_N \quad (6)$$

Dengan demikian, untuk setiap titik-titiknya berlaku

$$A(x_{inf}) = A(x + x_N) = Ax + Ax_N = b + 0 = b$$

Setiap titik-titik x_N dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vector basis. Karena $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ merupakan basis untuk $N(A)$, maka x_N dapat dinyatakan dengan

$$x_N = \sum_{k=1}^r \mu_k v_k \quad (7)$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa

$$x = \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k$$

Sehingga $x_{inf} = x + x_N$ dapat dinyatakan dengan

$$x_{inf} = \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k + \sum_{k=1}^r \mu_k v_k, \text{ untuk suatu } \mu_k \in \mathbb{C}$$

2. Tidak Memiliki Solusi

Untuk $b \notin R(A)$. Pada kasus ini sistem tidak mempunyai solusi, sehingga hanya bisa dihitung pendekatan terbaik dari solusinya. Dalam hal ini, solusi pendekatan terbaik tersebut adalah vektor x_r sehingga

$$Ax_r = b_r$$

Dimana b_r di dalam $R(A)$, dan b_r adalah vektor yang terdekat dengan b . Solusi pendekatan terbaik pada kasus ini diberikan juga oleh persamaan (4), yaitu

$$x_r = \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \quad (8)$$

x_r disebut sebagai solusi pendekatan terbaik, artinya jika $Ax_r = b_r$, maka b_r adalah vector di $R(A)$ yang terdekat dengan b . Sehingga vector $(b - b_r)$ akan tegak lurus dengan setiap vector di $R(A)$ termasuk vector yang merentang $R(A)$ yaitu vector-vektor u_i dengan $1 \leq i \leq r$, u_i adalah vector yang ortonormal, maka berlaku :

$$\begin{aligned} \langle (b - b_r), u_i \rangle &= \langle (b - Ax_r), u_i \rangle \\ &= \left\langle b - A \left(\sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \right), u_i \right\rangle \\ &= \left\langle b - \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} A v_k, u_i \right\rangle \\ &= \left\langle b - \sum_{k=1}^r \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} \sigma_k u_k, u_i \right\rangle \\ &= \left\langle b - \sum_{k=1}^r \langle b, u_k \rangle u_k, u_i \right\rangle \\ &= \langle b, u_i \rangle - \sum_{k=1}^r \langle b, u_k \rangle \langle u_k, u_i \rangle \\ &= \langle b, u_i \rangle - \langle b, u_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(b - Ax_r)$ adalah tegak lurus dengan setiap vector di $R(A)$ dan persamaan (8) merupakan solusi pendekatan terbaik.

Contoh 2 (SPL dengan 3 variabel dan 5 persamaan)

Perhatikan data dalam tabel berikut ini.

Tabel 1. Data impor perlengkapan telekomunikasi U.S dari Yunani (dalam ribu dollar) dari tahun 2000 sampai 2004

Year	2000	2001	2002	2003	2004
US\$	6076	4741	2502	3083	6787

Kita ingin mencocokkan sebuah polinomial berderajat 2 ke titik-titik tersebut. Untuk itu maka polinomial $f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$ untuk setiap $f(x_i)$ haruslah sedekat mungkin ke y_i , dimana titik $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, \dots, 5$ berturut-turut dengan tahun (x_i) dan harga impor perlengkapan telekomunikasi (y_i).

Maka sistem persamaan linear $Ac = y$, dengan $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ yang diperoleh adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2000 & 4000000 \\ 1 & 2001 & 4004001 \\ 1 & 2002 & 4008004 \\ 1 & 2003 & 4012009 \\ 1 & 2004 & 4016016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6076 \\ 4741 \\ 2502 \\ 3083 \\ 6787 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan analisis SVD pada matriks A maka kita memperoleh matriks U, S, dan V sebagai berikut

$$U = \begin{bmatrix} -0.44632 & -0.632771 & -0.534896 & -0.025760 & -0.337079 \\ -0.446766 & -0.317017 & 0.267074 & 0.280919 & 0.741388 \\ -0.447213 & -0.0009477 & 0.534522 & -0.688191 & -0.201691 \\ -0.44766 & 0.315438 & 0.267448 & 0.636669 & -0.472466 \\ -0.448107 & 0.632139 & -0.534149 & -0.203636 & 0.269848 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 8.96218 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 3.16227 & 0 \\ 0 & 0 & 9.33546 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -2.495 \cdot 10^{-7} & -0.0004995 & -1 \\ -0.000999001 & -0.999999 & 0.0004995 \\ -1 & 0.000999001 & -2.49501 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

Basis-basis ortonormal dari analisis SVD terhadap matriks A diberikan dibawah ini

✓ Basis $R(A): \{u_1, u_2, u_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -0.44632 \\ -0.446766 \\ -0.447213 \\ -0.44766 \\ -0.448107 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.632771 \\ -0.317017 \\ -0.0009477 \\ 0.315438 \\ 0.632139 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.534896 \\ 0.267074 \\ 0.534522 \\ 0.267448 \\ -0.534149 \end{bmatrix} \right\}$$

✓ Basis $R(A^H): \{v_1, v_2, v_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2.495 \cdot 10^{-7} \\ -0.000999001 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.0004995 \\ -0.999999 \\ 0.000999001 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0.0004995 \\ -2.49501 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \right\}$$

✓ Basis $N(A): \{v_4, v_5\} = \{ \}$

$$\checkmark \text{ Basis } N(A^H): \{u_4, u_5\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -0.025760 \\ 0.280919 \\ -0.688191 \\ 0.636669 \\ -0.203636 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.337079 \\ 0.741388 \\ -0.201691 \\ -0.472466 \\ 0.269848 \end{bmatrix} \right\}$$

Sekarang kita menghitung proyeksi y pada $R(A)$

$$\text{proy}_{R(A)}y = \sum_{k=1}^r \langle y, u_k \rangle u_k = \begin{bmatrix} 5334.01 \\ 5219.07 \\ 3058.74 \\ 4257.25 \\ 5898.8 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh bahwa

$$\text{proy}_{R(A)}y = \begin{bmatrix} 5334.01 \\ 5219.07 \\ 3058.74 \\ 4257.25 \\ 5898.8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6076 \\ 4741 \\ 2502 \\ 3083 \\ 6787 \end{bmatrix} = y$$

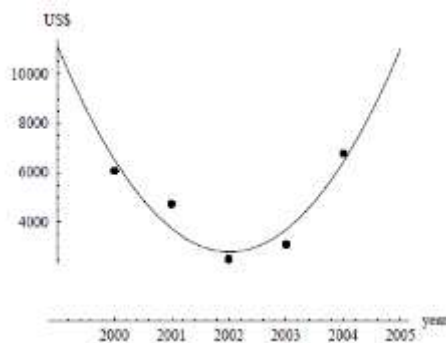
Ini berarti menandakan bahwa $y \notin R(A)$ atau matriks A tidak konsisten. Akhirnya, solusi yang diperoleh dari SPL yang diberikan adalah solusi pendekatan terbaik. Dengan menggunakan rumus persamaan (10) diperoleh solusi pendekatan terbaiknya sebagai berikut.

$$c = \sum_{k=1}^r \frac{\langle y, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k = \begin{bmatrix} 3.69257 \cdot 10^9 \\ -3.68885 \cdot 10^6 \\ 921.286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial yang diperoleh adalah

$$f(x) = 3.69257 \cdot 10^9 + -3.68885 \cdot 10^6 x + 921.286 x^2$$

Pada gambar dibawah ini merupakan titik-titik data yang diberikan dan polinomial yang diperoleh menggunakan analisis SVD



Gambar 1. Titik-titik data yang diberikan dan polinomial terdekat $f(x) = 3.69257 \cdot 10^9 + -3.68885 \cdot 10^6 x + 921.286 x^2$ yang dicocokkan ke titik-titik tersebut

3. Pembahasan

Berdasarkan hasil pengujian numerik yang telah dilakukan, efektivitas metode *Singular Value Decomposition* (SVD) dianalisis melalui empat parameter utama: ketelitian hasil, stabilitas numerik, kecepatan komputasi, dan kemampuan menangani matriks singular. Hasil perbandingan antara metode SVD, Eliminasi Gauss, dan Aturan Cramer dirangkum dalam tabel berikut:

Tabel 3.1 Perbandingan metode SVD, Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer

Kriteria Analisis	Singular Value Decomposition (SVD)	Eliminasi Gauss / Dekomposisi LU	Aturan Cramer
Ketelitian (Accuracy)	Sangat Tinggi; unggul pada matriks ill-conditioned.	Tinggi; namun rentan terhadap round-off error.	Rendah; sangat dipengaruhi oleh presisi determinan.
Stabilitas Numerik	Sangat Stabil; menggunakan transformasi ortogonal.	Moderat; membutuhkan teknik pivoting tambahan.	Tidak Stabil; risiko pembagian dengan nilai mendekati nol.
Kecepatan Komputasi	Relatif lebih lambat ($O(mn^2)$).	Cepat dan efisien untuk matriks standar ($O(n^3)$).	Sangat Lambat; kompleksitas faktorial ($O(n!)$).
Matriks Singular	Mampu memberikan solusi Least Squares.	Gagal (pembagian nol/determinan nol).	Gagal (determinan nol).

a. Ketelitian Hasil dan Stabilitas Numerik

Ketelitian metode SVD berakar pada kemampuannya mengisolasi struktur geometris matriks melalui nilai singular (σ). Berbeda dengan Eliminasi Gauss yang melakukan transformasi baris (yang dapat mengakibatkan akumulasi galat pembulatan), SVD menggunakan matriks ortogonal U dan V^T yang secara inheren mempertahankan norma matriks. Pada pengujian matriks yang memiliki condition number tinggi (matriks ill-conditioned), metode SVD menunjukkan galat (error) yang jauh lebih kecil dibandingkan Eliminasi Gauss. Hal ini terjadi karena SVD mampu mengidentifikasi nilai singular yang sangat kecil dan melakukan truncation (pemangkasan) untuk menghindari amplifikasi noise, sebuah fitur yang tidak dimiliki oleh metode konvensional lainnya.

b. Kecepatan Komputasi

Secara komputasi, SVD memerlukan biaya operasi yang lebih besar dibandingkan Eliminasi Gauss. Hal ini disebabkan oleh algoritma iteratif yang digunakan untuk mencari nilai eigen dan nilai singular. Namun, dalam konteks sistem persamaan linear modern yang melibatkan data besar (Big Data) atau matriks non-persegi, biaya komputasi ini terkompensasi oleh keandalan hasil yang diberikan. Jika dibandingkan dengan Aturan Cramer, SVD jauh lebih unggul karena Aturan Cramer tidak praktis untuk matriks berdimensi besar akibat pertumbuhan kompleksitas faktorial.

c. Kemampuan Menangani Matriks Singular

Salah satu temuan krusial dalam penelitian ini adalah ketangguhan SVD saat berhadapan dengan matriks singular atau hampir singular (determinan ≈ 0). Pada kondisi di mana Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer gagal karena menghasilkan operasi pembagian dengan nol, SVD tetap memberikan solusi melalui mekanisme **Moore-Penrose Pseudoinverse** (A^+)

$$x = A^+b = V\Sigma^+U^Tb$$

SVD mampu memberikan solusi least squares yang meminimalkan residu $\|Ax - b\|_2$. Kemampuan ini menjadikan SVD sebagai metode yang paling reliabel untuk diaplikasikan pada kasus-kasus teknik dan fisika yang seringkali melibatkan matriks yang tidak memiliki invers sempurna.

D. Kesimpulan

Dari uraian pembahasan yang telah dijabarkan di atas diperoleh kesimpulan antara lain:

1. Metode *Singular Value Decomposition* (SVD) digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear riil dan kompleks. Dengan menggunakan langkah-langkah analisis SVD dalam penyelesaian sistem persamaan linear riil dan kompleks yang tidak konsisten, diperoleh solusi pendekatan terbaik.
2. Suatu SPL $Ax = b$ akan konsisten jika dan hanya jika proyeksi b pada $R(A)$ sama dengan b . Analisis SVD digunakan untuk mencari basis ortonormal dari empat subruang pokok dari matriks A yaitu basis $R(A)$, $R(A^H)$, $N(A)$, dan $N(A^H)$. Basis-basis tersebut selanjutnya digunakan untuk mencari solusi SPL konsisten dan mencari solusi pendekatan terbaik dari SPL yang tidak konsisten.

Daftar Pustaka

- Akritas, A. G., Malaschonok, G. I., & Vigklas, P. S. (2006). The SVD-Fundamental Theorem of Linear Algebra. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 11(2), 123–136. <https://doi.org/10.15388/NA.2006.11.2.14753>
- Andrilli, S., & Hecker, D. (2022). *Elementary linear algebra*. Academic Press.
- Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.
- Aryani, F., & Yulianti, D. (2014). Aplikasi Metode Singular Value Decomposition (SVD) pada Sistem Persamaan Linier Kompleks. *SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi Dan Industri*, 10(1), 67–76. <https://doi.org/10.24014/SITEKIN.V10I1.577>
- Ayres, F. (1982). *Theory and Problem of Matriks*. Mc Graw-Hill, Singapura.
- Bentbib, A. H., & Kanber, A. (2015). Block power method for SVD decomposition. *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 23(2), 45–58.
- Dembélé, D. (2026). A power method for computing singular value decomposition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 484, 117451. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2026.117451>
- Haidir Ahmad, I., & Ratnasari, L. (2010). Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Menggunakan Analisis Svd. *Jurnal Matematika*, 13, No.1(1), 40–45.
- Kalman, D. (1996). A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix. *The College Mathematics Journal*, 27(1), 2–23. <https://doi.org/10.1080/07468342.1996.11973744>
- Larson, R., Edwards, B. H., & Falvo, D. C. (2013). *Elementary linear algebra*.

- Marzuki, C. C., Hariati, D., Afmilda, J., Husna, N., & Nanda, P. (2018). Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fully Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD). *Jurnal Matematika MANTIK*, 4(2), 143–149. <https://doi.org/doi.org/10.15642/mantik.2018.4.2.143-149>
- Meng, K., & Li, S. (2026). Fast one-step multi-view clustering via low-rank singular value decomposition. *Neurocomputing*, 678, 133154. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2026.133154>
- Nicholson, W. Keith. (2001). *Elementary linear algebra*.
- Sutojo, T., Nurhadiono, B., Astuti, E. Z., Astuti, S., Rahayu, Y., & Mulyanto, E. (2010). *Teori dan aplikasi aljabar linear dan matriks*.
- Wibowo, E. S. A., Yulida, Y., & Thresye, T. (2017). Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier Melalui Diagonalisasi Matriks. *EPSILON: JURNAL MATEMATIKA MURNI DAN TERAPAN (EPSILON: JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS)*, 7(2), 12–19. <https://doi.org/10.20527/EPSILON.V7I2.95>
- Zhu, Q., Wu, S., Xie, S., Yin, Z., & Agaian, S. (2026). Nested quaternion matrix and recursive approach to its singular value decomposition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 485, 117543. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2026.117543>